دورة الفصل الثالث 2015

* السؤال الأول: M مودول على الحلقة الواحدية R

① تشكل مودول جزئي من المودول M $Rm = \{rm : r \in R\}$

② R حقل أثبت M عديم الفتل

③ برهن M بسيط اذا وفقط $(m \neq 0 \Rightarrow Rm = M)$

الحل:

① Rm تشكل مودولاً جزئياً من M أي أن $Rm \subset M$

$0_m \in Rm \Rightarrow Rm \neq \emptyset$

$\forall a \in Rm , \exists r \in R , a = rm$

كون M مودول على R عندئذ $rm \in M$ ومنه $Rm \subset M$ والمطلوب

أ) $\forall a, b \in Rm , \exists r_1, r_2 \in R , a = r_1 m , b = r_2 m$

$a - b \in Rm$

$\Rightarrow a - b = r_1 m - r_2 m = (r_1 - r_2) m \in Rm$

كون R حلقة عندئذ $r_1 - r_2 \in R$

ب) $\forall a \in Rm , \exists r_1 \in R , a = r_1 m \quad \forall \alpha \in R$

$\alpha a \in Rm \Rightarrow$

$\alpha a = \alpha (r_1 m) = (\alpha r_1) m \in Rm$

لأن R حلقة واحدية مغلقة $r_1 \alpha \in R$

عندئذ $\alpha r_1 \in R$ ومنه تحقق الشروط السابقة ينتج

Rm مودول جزئي من M

$(Rm \subset M)$

② اذا كانت R حقل $0 \neq r \in R$ يوجد $r^{-1} \in R$ ومن ثم $rm = 0_m \Rightarrow r^{-1}(rm) = r^{-1} 0 = 0_m \Rightarrow (r^{-1} r) m = 0_m \Rightarrow$

$1 \cdot m = 0_m \Rightarrow m = 0_M$

أي أن عنصر الفتل الوحيد في M هو من الشكل 0_m (صفر المودول)

وذلك لأجل M عديم الفتل

★ السؤال الثاني:

1) $0 \to \ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{Im} f \to 0$
أثبت انها تامة

مقرر 2) $f: M \to N$ و M نصف بسيط فإن N نصف بسيط

الحل:

1) تكون المتتالية تامة اذا كانت كل من المتتاليات الجزئية منها تامة

$0 \to \ker f \xrightarrow{i} M$ تامة اذا كان i متباين

$\ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N$ تامة لأن $\operatorname{Im} i = \ker f$

$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{Im} f$ تامة $\ker \pi = \operatorname{Im} f$

$N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{Im} f \to 0$ تامة π غامر

بالتالي المتتالية بالكامل تامة

★ السؤال الثالث:

M مودول في الحلقة المحلية الواحدية R

M متولد بـ s عنصر من عناصره ولتكن U المودول الجزئي من M

1) M/U علماً انه متولد بـ s عنصر

2) $M/U \oplus V$ أثبت انه متولد بـ s عنصر

الحل

① نفرض انه $m_1, m_2, \dots, m_s$ تولد M، وبالتالي أي عنصر $m \in M$ هو تركيب خطي لهذه العناصر

$$\forall m \in M \quad m = \sum_{i=1}^{s} r_i m_i \; , \; r_i \in R$$

ومن ثم يكون

$$m + U \in M/U = (r_1 m_1 + r_2 m_2 + \dots + r_s m_s) + U$$
$$= (r_1 m_1) + U + (r_2 m_2) + U + \dots + (r_s m_s) + U$$
$$= r_1(m_1 + U) + r_2(m_2 + U) + \dots + r_s(m_s + U)$$

$m_i + U \in M/U \qquad i = 1, 2, \dots$

$$m_i + U = \sum_{i=1}^{s} r_i(m_i + U)$$

أي أن $M+U$ هو تركيب خطي لهذه العناصر s عناصر وبالتالي المودول خارج

② $M = U \oplus V \Rightarrow$

$M = U + V \ , \ U \cap V = \{0\}$

$M / V = U + V / V \cong U / U \cap V = U / \{0\} \cong U$

بما أن M/V مولد نهائياً متولد بـ S عنصر بما هو متماثل الأيزومورفيزم فإن U متولد بـ S عنصر بما هو

السؤال الرابع: M مودول على الحلقة الواحدية R.

أثبت تكافؤ الشرطين:

M نويثري ①

M يحقق الشرط الأعظمي ②

ن ① ⇐ ②

نفرض أن M نويثري ولتكن P مجموعة غير خالية من المودولات الجزئية في M ولنأخذ أحد عناصرها M_0 إذا كان M_0 أعظمياً تحقق المطلوب وإلا يوجد في P مودول جزئي M_1 حيث أن $M_0 \subsetneq M_1$ إذا كان M_1 أعظمياً تم المطلوب وإلا يوجد في P عنصر M_2 حيث أن $M_1 \subsetneq M_2$ وهكذا باستمرار هذه العملية نحصل على متسلسلة متزايدة من المودولات الجزئية $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3$ في M وبما أن M نويثري فهي تتوقف هذه السلسلة أي يوجد عدد طبيعي n حيث أن

$M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M_{n+1}$

أي أن $M_n = M_k$ من أجل $k \geq n$ عندئذ سيكون M_n عنصراً أعظمياً في P ومنه P كيفية فإن M يحقق الشرط.

ن ② ⇐ ①

إذا لم يكن M نويثرياً فيوجد متسلسلة متزايدة (غير منتهية) لا تتوقف من المودولات الجزئية في M

أي

$M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq \dots$

ومنه لا نستطيع أن نجد في السلسلة عنصراً أعظمياً أي أن المودول لا يحقق (الشرط الأعظمي) وهذا يخالف الفرض إذاً M نويثري.